

SOAL SET A

HARI PERTAMA

1. Jika n adalah banyak bilangan 1 yang muncul pada hasil penjumlahan berikut

$$1 + 11 + 111 + \cdots + \underbrace{11 \cdots 11}_{201 \text{ digit}},$$

tentukan banyak digit k yang merupakan penyelesaian pada persamaan di bawah ini.

$$\underbrace{11 \cdots 100 \cdots 0}_n + \underbrace{88 \cdots 80}_{n+2} = 9(k^2 - 1).$$

2. Dari sekumpulan kartu bilangan bulat positif berbeda akan diambil secara bertahap dan ditumpuk satu persatu menjadi satu tumpukan dengan aturan sebagai berikut.

A. Aturan pengambilan

- A1. Pengambilan pertama 1 kartu, pengambilan kedua 2 kartu, pengambilan ketiga 3 kartu dan seterusnya.
- A2. Kartu yang diambil pada setiap pengambilan (kecuali pengambilan pertama) harus selalu lebih besar dari kartu terbesar di pengambilan sebelumnya.
- A3. Setiap pengambilan (kecuali pengambilan pertama) harus berbeda paritasnya dengan pengambilan berikutnya. Maksudnya, jika pengambilan pertama adalah kartu genap, maka pengambilan kedua harus kartu ganjil semua, pengambilan ketiga harus kartu genap semua, dan begitu seterusnya serta sebaliknya

B. Aturan penumpukan

- B1. Proses penumpukan dilakukan setelah proses pengambilan selesai.
- B2. Kartu yang lebih kecil tidak boleh berada di atas kartu yang lebih besar.

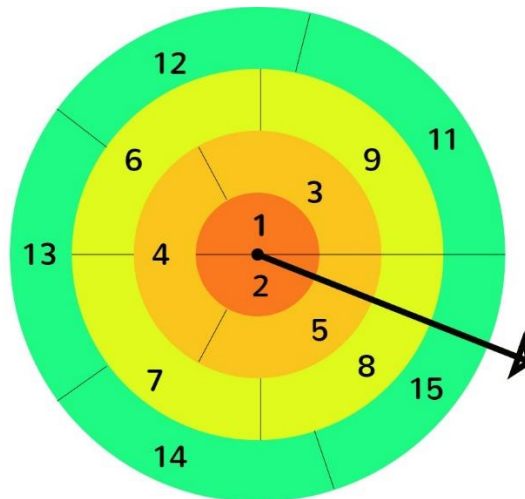
Proses pengambilan kartu akan dihentikan setelah mendapatkan setidaknya 2021 kartu dan akan dilanjutkan dengan proses penumpukan.

Jika kartu yang ditumpuk pertama diberi kode 0001, kartu yang ditumpuk kedua diberi kode 0002, dan seterusnya, maka tentukan bilangan bulat terkecil yang mungkin ada di kartu dengan kode 2021.

3. Kubus $ABCD.EFGH$ memiliki volume 1000 liter. Garis l melalui titik pusat alas $ABCD$ dengan jarak l ke A adalah $30\sqrt{2}$ cm. Jika akan dibuat empat persegi panjang dengan syarat salah satu titik sudut setiap persegi panjang terletak di l dan salah satu sisi setiap persegi panjang adalah rusuk kubus $ABCD.EFGH$ yang berbeda, tentukan jumlah luas minimum keempat persegi panjang tersebut.
4. Sebuah wadah memuat 8 buah bola, empat berwarna merah dan empat berwarna hijau. Dua bola diambil sekaligus secara acak dari wadah. Jika bola yang terambil berwarna merah dan hijau, maka kedua bola tersebut dibuang dan digantikan dengan dua bola

berwarna biru. Sedangkan jika kondisi lain yang terjadi, bola yang terambil dikembalikan ke wadah. Proses pengambilan ini dilakukan terus menerus sampai wadah hanya berisi bola berwarna biru saja. Jika P_{ij} menyatakan peluang bahwa banyak bola hijau sebelum pengambilan adalah i dan setelah pengambilan adalah j , tentukan semua nilai P_{ij} yang mungkin.

5. Penentuan hadiah sebuah permainan dilakukan dengan memutar anak panah pada suatu bidang lingkaran yang dibagi menjadi daerah bernomor seperti pada gambar berikut.



Penyusunan nomor diatur dengan ketentuan berikut:

- Lingkaran pertama dibagi dalam 2 daerah seimbang dan diberi nomor 1 dan 2;
- Lingkaran kedua dibagi dalam 3 daerah seimbang dengan nomor 3, 4, dan 5;
- Lingkaran ketiga dibagi dalam 4 daerah seimbang dengan nomor 6, 7, 8, dan 9;
- Lingkaran keempat dibagi dalam 5 daerah seimbang dengan nomor 11, 12, 13, 14, dan 15.

Permainan dilakukan dengan memutar tanda panah (dengan arah bebas), kemudian pada saat tanda panah berhenti diamati jumlah nomor semua daerah yang dilewati oleh tanda panah tersebut. Asumsikan bahwa tanda panah berhenti secara acak di setiap kemungkinan posisi, serta tidak berhenti di ruas garis penyekat antar bagian pada lingkaran tersebut. Seorang pemain akan mendapatkan hadiah bila jumlah semua nomor yang dilalui anak panah adalah **ganjil**. Tentukan peluang bahwa pemain tersebut akan mendapatkan hadiah.

HARI KEDUA

6. Suatu fungsi suku banyak berderajat n dapat dinyatakan dalam bentuk

$$f(x) = a_n x^n + a_{n-1} x^{n-1} + \dots + a_0$$

dengan $a_n \neq 0$. Diketahui fungsi suku banyak $T(x)$ memenuhi persamaan

$$2T(-c + 2T(x)) = c + x^{16}.$$

Tentukan $T(x)$ jika $T(2) = 2021$.

7. Diketahui aba adalah bilangan tiga digit dengan $a \times b = 24$. Koleksi(n) adalah barisan bilangan bulat positif yang jumlah dan hasil kali semua sukunya sama dengan n . Sebagai ilustrasi, dua contoh Koleksi(12) adalah 1,1,1,1,2,6 dan 1,1,1,1,1,3,4. Jika m adalah banyak suku dari Koleksi(aba), tentukan nilai terbesar m yang mungkin.

8. Diketahui segiempat sembarang $ABCD$ di mana $AB = 2$ cm, $BC = 8$ cm, $CD = 6$ cm, dan $DA = 7$ cm, terbagi menjadi dua buah segitiga oleh diagonal AC dengan panjang $AC = 9$ cm. Lingkaran dalam kedua segitiga menyinggung diagonal AC di titik E dan F . Jika titik pusat masing-masing lingkaran dalam segitiga adalah M dan N , serta luas segitiga EFM adalah L cm², tentukan nilai maksimum dari L^2 .
9. Diketahui $A = \{a, e, i, o, u, x, y, z\}$ dan $B = \{-2, -1, 0, 1, 2, 3, 4\}$. Fungsi f dari A ke B disebut fungsi “**asyik**” jika memenuhi tiga syarat berikut:
- Untuk setiap $n \in B$ terdapat $m \in A$ sedemikian sehingga $f(m) = n$.
 - Huruf vokal harus dipetakan ke bilangan genap,
 - Huruf konsonan harus dipetakan ke bilangan ganjil.
- Jika diambil satu fungsi dari A ke B secara acak, tentukan peluang bahwa yang terambil adalah fungsi “**asyik**”.
10. Dari kubus-kubus yang telah dinomori 1, 2, 3, dst. akan dipilih kubus-kubus yang dapat dimasukkan ke dalam kelompok A, B, dan C dengan kriteria sebagai berikut.
- Kelompok A: kubus dengan nomor 1 (kubus-1).
 - Kelompok B: kubus yang nomornya hanya memiliki satu faktor prima, yaitu 3. (Contoh: kubus-3, kubus-27)
 - Kelompok C: kubus yang nomornya dapat dinyatakan sebagai hasil penjumlahan nomor kubus-kubus berbeda yang ada di kelompok A ataupun kelompok B (Contoh: kubus-4, kubus-30, kubus-31)
- Kubus-kubus di kelompok A, B, C dapat disusun menjadi piramida dengan banyak kubus di tiap tingkatnya tertentu dan nomornya terurut dari kecil ke besar seperti terlihat pada ilustrasi piramida tingkat 2 dan tingkat 3 sebagai berikut.

	Piramida Tingkat 2	Piramida Tingkat 3																																		
Tampak Atas	<table><tr><td>3</td><td>4</td><td>9</td></tr><tr><td>10</td><td>1</td><td>13</td></tr><tr><td>27</td><td>28</td><td>30</td></tr></table>	3	4	9	10	1	13	27	28	30	<table><tr><td>31</td><td>36</td><td>37</td><td>39</td><td>40</td></tr><tr><td>81</td><td>3</td><td>4</td><td>9</td><td>90</td></tr><tr><td>91</td><td>10</td><td>1</td><td>13</td><td>109</td></tr><tr><td>111</td><td>27</td><td>28</td><td>30</td><td>120</td></tr><tr><td>121</td><td>243</td><td>244</td><td>246</td><td>247</td></tr></table>	31	36	37	39	40	81	3	4	9	90	91	10	1	13	109	111	27	28	30	120	121	243	244	246	247
3	4	9																																		
10	1	13																																		
27	28	30																																		
31	36	37	39	40																																
81	3	4	9	90																																
91	10	1	13	109																																
111	27	28	30	120																																
121	243	244	246	247																																
Tampak Depan	<table><tr><td></td><td>1</td><td></td></tr><tr><td>27</td><td>28</td><td>30</td></tr></table>		1		27	28	30	<table><tr><td></td><td></td><td>1</td><td></td><td></td></tr><tr><td></td><td>27</td><td>28</td><td>30</td><td></td></tr><tr><td>121</td><td>243</td><td>244</td><td>246</td><td>247</td></tr></table>			1				27	28	30		121	243	244	246	247													
	1																																			
27	28	30																																		
		1																																		
	27	28	30																																	
121	243	244	246	247																																
Tampak Kanan	<table><tr><td></td><td>1</td><td></td></tr><tr><td>30</td><td>13</td><td>9</td></tr></table>		1		30	13	9	<table><tr><td></td><td></td><td>1</td><td></td><td></td></tr><tr><td></td><td>30</td><td>13</td><td>9</td><td></td></tr><tr><td>247</td><td>120</td><td>109</td><td>90</td><td>40</td></tr></table>			1				30	13	9		247	120	109	90	40													
	1																																			
30	13	9																																		
		1																																		
	30	13	9																																	
247	120	109	90	40																																

Jika kubus-9 ada di suatu piramida, posisi kubus-9 akan selalu berada di lapisan ke-2, baris ke-1, kolom ke-3. Posisi kubus-9 dapat ditulis dengan $(2,1,3)$.

Apabila kubus-2021 dimasukkan dalam suatu piramida sesuai dengan urutannya, maka tentunya akan menggeser kubus-kubus dengan nomor yang lebih tinggi.

Jika kubus-2021 terletak di lapisan ke- m , tentukan nomor kubus yang posisinya (m, m, m) .