

Olimpiade Nasional MIPA Perguruan Tinggi 2023

BIDANG MATEMATIKA

HARI PERTAMA

14 JUNI 2023

WAKTU: 4 JAM

Petunjuk pengerjaan:

1. Tes ini terdiri dari 5 soal, tuliskan jawaban Anda lengkap dengan argumentasi dan penjelasan.
2. Setiap soal bernilai 10 angka.
3. Anda boleh menyelesaikan soal yang mana pun sesuka Anda.
4. Tuliskan nomor tes Anda pada setiap lembar jawaban. Jangan tuliskan nama atau universitas asal Anda.
5. Gunakan pena atau pulpen. Pensil hanya boleh digunakan untuk gambar atau sketsa.
6. Jika tempat yang tersedia tidak mencukupi, gunakan halaman di belakangnya atau meminta tambahan lembar jawaban. Tuliskan nomor tes Anda dan nomor soal pada lembar jawaban tambahan.
7. Bekerjalah dengan cermat dan teliti. Anda sama sekali tidak diperkenankan menggunakan penghapus cair.
8. Di akhir tes, kumpulkan berkas soal ini secara utuh.

Nomor tes: _____

1. Diberikan enam bilangan asli berbeda yang tidak melebihi 426. Buktikan terdapat tiga diantaranya, sebut saja a, b, c yang memenuhi kondisi $a < b + c < 4a$.

Nomor tes: _____

2. Tunjukkan bahwa tidak terdapat bilangan kompleks z sedemikian sehingga $|z| = 1$ dan $z^{2023} + z + 1 = 0$.

Nomor tes: _____

3. Diberikan barisan bilangan real (x_n) , dan fungsi bernilai real f dan g .

a. Jika barisan (x_n) didefinisikan dengan

$$x_n = \int_1^n \frac{\sin(t)}{t^2} dt,$$

buktikan barisan (x_n) konvergen.

b. Jika fungsi f kontinu dan g terdeferensialkan pada $\mathbb{R}$ dengan

$$(g'(1) - f(1))(f(0) - g'(0)) > 0,$$

buktikan bahwa terdapat $c \in (0, 1)$ sehingga $g'(c) - f(c) = 0$.

Nomor tes: _____

4. Misalkan $G \subseteq \mathbb{R}^3$ adalah grup dengan operasi $\star$ (G tidak selalu merupakan subgrup dari $\mathbb{R}^3$). Diketahui bahwa untuk hasil kali silang (*cross product*) di $\mathbb{R}^3$ dan untuk setiap $\mathbf{a}, \mathbf{b} \in G$ berlaku: $\mathbf{a} \times \mathbf{b} = \mathbf{a} \star \mathbf{b}$ atau $\mathbf{a} \times \mathbf{b} = \mathbf{0}$ (atau keduanya).
- Tunjukkan bahwa untuk setiap $\mathbf{a}, \mathbf{b} \in G$ berlaku $\mathbf{a} \times \mathbf{b} = \mathbf{0}$.
 - Berikan contoh grup $(G, \star)$ yang memenuhi sifat di atas dengan $|G| > 1$ dan G bukan subgrup dari $\mathbb{R}^3$.

Nomor tes: _____

5. Misalkan $n \geq 2$ suatu bilangan asli dan P_n adalah ruang polinom dengan koefisien real berderajat paling tinggi n . Diberikan polinom-polinom tak nol $Q_0(x)$, $Q_1(x)$, $Q_2(x), \dots, Q_n(x)$ di P_n sehingga $\deg(Q_j) = j$ untuk $j = 0, 1, 2, \dots, n$ dan

$$Q_j(2023) = \begin{cases} 1, & \text{jika } j = 0, \\ 0, & \text{jika } j = 1, 2, \dots, n. \end{cases}$$

Jika $D : P_n \rightarrow P_n$ adalah suatu pemetaan linear dengan

$$D(Q_j) = \begin{cases} 0, & \text{jika } j = 0, \\ Q_{j-1}, & \text{jika } j = 1, 2, \dots, n, \end{cases}$$

buktikan bahwa untuk sebarang polinom $f(x) \in P_n$ berlaku

$$f(x) = \sum_{j=0}^n (D^j(f))(2023) \cdot Q_j(x).$$

Catatan: D^j adalah komposisi dari D sebanyak j kali.